Arbeitsauftrag Mittwoch, 1. April 2020

Bitte erledigt die Aufträge sorgfältig und seriös. Gewisse Aufgaben werden durch ein Lösungsvideo erklärt.

Bei anderen Aufgaben erhaltet Ihr dann aber einfach Lösungen. Alles könnt Ihr auf der Internetseite www.aleph-null.li finden.

Für die heutige Doppellektion ist folgendes zu erledigen.

Tätigkeit 1:
Bitte schaut zuerst das kurze Einführungsvideo.

Bitte löst die Übung 16 im Dokument.

Ich werde zu jeder Funktion f, g und h ein Lösungsvideo zur Verfügung stellen. Bitte schaut mindestens das Video zu f, da ich da zuerst die klassische Methode verwende und dann im zweiten Video noch einen kleinen Trick verrate.

Tätigkeit 2:
Bitte löst die Übung 17a im Dokument.

Danach schaut Euch das Lösungsvideo an. Hier zeige ich wieder einen Trick, der die Berechnung hier erleichtern kann.

Tätigkeit 3:
Wie ihr im Einführungsvideo gehört habt, beschäftigen wir uns nun näher mit den Ansätzen.

Für die Partialbruchzerlegung ist der Begriff «echter Bruch» zentral. Als echten Bruch bezeichnet man zum Beispiel $\frac{2}{5}$ nicht aber $\frac{7}{5}$ weil beim letzteren der Zähler grösser ist als der Nenner. Somit wäre $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ wobei $\frac{2}{5}$ nun ein echter Bruch ist.

Bei Bruchtermen des Typs $\frac{p(x)}{q(x)}$, wo $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind spricht man von echten Brüchen, wenn das Zählerpolynom einen kleineren Grad hat als das Nennerpolynom. Somit muss bei der Partialbruchzerlegung immer darauf geachtet werden, dass man als Zerlegungsansatz echte Brüche nimmt. Man nimmt im Zähler also immer ein Polynom, welches um genau ein Grad tiefer ist als das Nennerpolynom. (siehe Beispiel 1 und 2)

Beispiele:

1) Hier nimmt man den naheliegenden Ansatz mit den Linearfaktoren
$(x-4)$ und $(x-2)$ im Nenner.

$$\frac{2x+3}{x^2-6x+8}=\frac{2x+3}{(x-4)(x-2)}=\frac{A}{(x-4)}+\frac{B}{(x-2)}$$

2) Hier nimmt den Ansatz

$$\frac{3x^2+2x+3}{(x-4)(x^2+x+8)}=\frac{A}{(x-4)}+\frac{Bx+C}{x^2+x+8}$$

weil das quadratische Polynom unzerlegbar ist.
Der hintere Term ist nun ein echter Bruch, da das Zählerpolynom einen kleineren Grad hat als das Nennerpolynom. Wir haben nun einen Linearfaktor $(x-4)$ und ein in $\mathbb{R}$ nicht zerlegbarer quardratischer Faktor x^2+x+8 im Nenner.

Hier könnte nun die Frage aufkommen, warum das Zählerpolynom genau einen Grad tiefer sein muss als das Nennerpolynom? Die Antwort darauf wäre: Die Mathematik wird uns nach der Berechnung der Koeffizienten B und C schon «sagen», was der Grad ist. Vielleicht wäre in diesem Beispiel $B=0$ und dann wäre der Zähler um zwei Grade tiefer. Wir sind jetzt einfach mal vom grösstmöglichen Zählergrad in unserem Ansatz ausgegangen.

3) Für den folgenden Bruch nimmt man aber den weniger naheliegenden Ansatz

$$\frac{6x^2-5x+2}{(x+2)(x^2-2x+1)}=\frac{6x^2-5x+2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

mit den Linearfaktoren $(x+2)$ und $(x-1)$ im Nenner. Das Verwunderliche ist aber die Art der Benutzung dieser Faktoren. Einmal $(x-1)$ und einmal in der zweiten Potenz $(x-1)^2$.

Die Frage ist warum nimmt man nicht einen Ansatz wie in Beispiel 2? Dieser wäre dann

$$\frac{6x^2-5x+2}{(x+2)(x^2-2x+1)}=\frac{6x^2-5x+2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{\beta x+\gamma}{x^2-2x+1}$$

Ich werde versuchen diese Frage in einem Video zu beantworten.

Trotz allem werden die Ansätze wie in Beispiel 2 (mit dem nicht-zerlegbaren Polynom) leicht mysteriös bleiben und man könnte folgende Frage stellen:

Für Interessierte - Fragen, die offen bleiben werden: (nicht prüfungsrelevant)
Ein, in den reellen Zahlen nicht zerlegbares Polynom, könnte über den komplexen Zahlen zerlegt werden. Könnte man nun alle Zerlegungen mit komplexen Linearfaktoren machen? Würde das helfen, oder führt es am Ende auf das Gleiche?

Ganz liebe Grüsse

Sven Huber